المستمر لانتيس قابل للاشتقاق أما المطلق نعم .

من البرهنة تابع للمحاضرة ١١ .

علوي .

② اذا كانت كل من f, g مستمرتان مطلقاً على $[a,b]$ فإن كل من الدوال αf حيث $\alpha \neq 0$ ثابت $\in \mathbb{R}$ ، $|f|$ ، $\frac{1}{f}$ حيث $f \neq 0$ ، f^2 ،
بالشكل: $x \in [a,b]$; $g \neq 0$; $\frac{f}{g}$ ، $f.g$ ، $f \pm g$
تكون هذه الدوال مستمرة بالإطلاق .

③ كل دالة مثل f مستمرة مطلقاً على الفترة $[a,b]$ يمكننا تصورها على هيئة (شكل) فرق لدالتين مستمرتين مطلقاً تزايديتين على هذه الفترة .

مثال للحل: (13):

لتكن الدالة $f = f(u)$ كمولة حسب مفهوم ريمان على الفترة $[a,b]$ ولنعرف الدالة

$$G(x) = c + \int_a^x f(u)\, du \; ; \quad c \text{ ثابت}$$

$$a \leq x \leq b$$

أثبت أن الدالة G مستمرة مطلقاً على $[a,b]$ باستخدام التعريف (هومياً) .

< نعود إلى القياس >

مبرهنة: (مثال):

اذا كانت الدالة f تحقق شرط ليبشتز على الفترة $[a,b]$ فإنها تكون مستمرة مطلقاً عليها .

الإثبات:

طالما أن f تحقق شرط ليبشتز على الفترة $[a,b]$ هذا يعني أن:

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y| \; ; \quad x, y \in [a,b] \; ; \; L > 0 \qquad (\blacktriangle)$$

من أجل كل $\varepsilon > 0$ ، نختار δ بحيث $\delta < \frac{\varepsilon}{L}$ عندها من أجل أي أسرة منتهية $\{(a_k, b_k)\}_{1 \leq k \leq n}$ من الفترات المنفصلة $(a_k, b_k) \subset [a,b]$ حيث $k = 1, 2, \dots, n$.

و المنفصلة مثنى مثنى بحيث أن مجموع أطوالها: $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$

يكون لدينا:

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k - a_k)| \overset{\text{حسب}}{\underset{\blacktriangle}{\leq}} L \sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k|$$

$$= L \sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| = L \sum (\qquad) < L.\delta$$

$$< L \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

أي أن شرط الاستمرار المطلق معقد والذي منه نقول أن الدالة f المعرفة المحققة لشرط ليبشتز على $[a,b]$ مستمرة مطلقاً عليه.

مثال:

حقق ذلك من أجل الدالة $\sin 2x$ حيث $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

نتيجة مثال 2:

اذا كانت الدالة f مشتقاً f' مستمراً ومحدوداً على الفترة $[a,b]$ فإن f تكون عندئذٍ مستمرة مطلقاً على هذه الفترة (مشتقها محدود ⇐ تحقق شرط ليبشتز) وذلك حسب المثال ① السابق.

تمرين:

بين فيما اذا كانت $f(x) = x^2 + 5x + 6$ على الفترة $[1,5]$ مستمرة مطلقاً.

الحل: $|f'(x)| \leq |2x+5| \leq 15 \;;\; x \in [1,5]$

نتيجة:

اذا كانت الدالة f مستمرة مطلقاً على $[a,b]$ فإن مشتقها f' موجود في كل نقطة (أي أنها اشتقاقية في كل نقطة من هذه الفترة) أو يقال مشتقها موجود a.e في كل مكان على هذه الفترة

$$y' = f'(x) \;;\; x \in X - \{x_1, x_2, ...\}$$

حيث $\lambda(\{\quad\}) = 0$

~~مثال~~: وتكون عليه متكتب:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt$$

وهذه الدالة الأخيرة أيضاً مستمرة مطلقاً وتقريباً في كل نقطة (في كل مكان)

$$f'(x) = f'(x) \quad ; \quad x \in [a,b]$$

ومنه نستنتج: اذا كانت الدالة $f \in BV[a,b]$ عندئذٍ يكون مشتقها f' كمولاً على هذه الفترة.

- ما العلاقة بين الدالة ومفهوم المتغيرات المحدودة على فترة وتكاملية هذه الدالة حسب ريمان على تلك الفترة.

مثال:

لتكن لدينا الدالة f

أي أن $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$.

$$t \mapsto f(t) = u(t) + i\, v(t)$$

يقال عن هذه الدالة المعقدة ذات المتغير الحقيقي t على $[a, b]$ أنها ق.ت.م
إذا وفقط إذا كان كل من مترافيها الحقيقيين u ، v دوال ق.ت.م بالمتغير t على
الفترة $[a, b]$ مثلاً: $f(t) = e^t + i \arctan t$
ق.ت.م على الفترة $[0, 2]$ وكذلك ينطبق الكلام يقال عن الدالة لو عرفت:
$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
يطلب وضع مثال: $f(z) = f(x, y)$
$= u(x, y) + i\, v(x, y).$